PROBLEMATIKA SENZITIVITY SIETÍ

Lubomír KUBÁČEK a Ludmila KUBÁČKOVÁ

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky Přírodovědecká fakulta,

Univerzita Palackého, Olomouc

Podporené grantom č. 201/96/0436 Grantovej agentúry ČR.

Abstrakt. *Pri použití viacerých meracích systémov pri určovaní parametrov geodetickej siete je potrebné zohľadniť ich, vo všeobecnosti rôznu, presnosť. Približné údaje o charakteristikách presnosti máme vždy k dispozícii pred meraním. V práci je vyšetrený vplyv apriórnych neistôt o charakteristikách presnosti na presnosť odhadov a ďalej sú určené hranice, ktoré tieto neistoty nesmú prekročiť, ak nechceme podstatným spôsobom porušiť kvalitu odhadov, prípadne iných štatistických charakteristík výslednej siete (konfidenčné oblasti pre jednotlivé body, združené konfidenčné oblasti pre skupinu bodov, prahové oblasti a p.).*

ÚVOD

Súradnice, prípadne výšky bodov geodetickej siete určujeme obvykle skupinou prístrojov. Dnes si nemožno predstaviť napr. meranie v nivelačnej sieti bez súčasného použitia nivelačného prístroja a gravimetra. Charakteristiky presnosti týchto prístrojov a spôsob spracovania nameraných údajov určujú charakteristiky presnosti určených odhadov súradníc, ich nadmorských výšok, prípadne gravitačného zrýchlenia. Tieto skutočnosti sa samozrejme prejavujú aj v sieťach GPS.

Charakteristiky presnosti sú uvádzané v certifikátoch meracích prístrojov. Tieto údaje sa môžu od skutočnosti viac alebo menej odchyľovať. Môže to byť spôsobené transportom prístrojov, ich častým používaním, vplyvom nepriaznivých meteorologických pomerov ap.

Akékoľvek odchýlky charakteristík presnosti od skutočných hodnôt sa vo výpočtoch vždy prejavia zhoršením presnosti výsledných odhadov. (Je zaujímavé, že toto zhoršenie nastáva aj v prípade, že presnosť použitých prístrojov je v skutočnosti vyššia než sme predpokladali. Pri použití jediného prístroja tento efekt nenastáva.)

Je preto potrebné preskúmať nielen vplyv týchto odchýlok na výslednú presnosť, ale aj určiť hranice, ktoré nesmú byť prekročené ak nechceme túto presnosť znížiť podstatným spôsobom.

V prípade, že údajom z certifikátu už nemožno dôverovať, odhadujú sa charakteristiky presnosti zo súboru nameraných údajov. Tieto odhady obsahujú v sebe samozrejme určitú neistotu. V ďalšom spracovaní nameraných údajov ju uvážime alebo ju zanedbáme. Ak ju zanedbáme musíme sa najprv presvedčiť, či zhoršenie výsledných odhadov je alebo nie je zanedbateľné. Toto rozhodnutie môžeme vykonať relatívne jednoducho pomocou teórie senzitivity. Uváženie neistôt v odhadoch charakteristík presnosti v ďalšom spracovaní nameraných údajov vedie obvykle ku komplikovaným matematickým úvahám a preto sa predbežne v praxi nepoužíva.

Príspevok autorov k teórii senzitivity je uvedený v prácach [1] až [8].

V ďalšom sú použité metódy z [9] a [10].

1. Označenia, definície a pomocné tvrdenia

Matematický model geodetickej siete budeme pre jednoduchosť uvažovať v tvare

$$Y = X\beta + \varepsilon, \quad \beta \in R^k, \; Var(\varepsilon) = \Sigma(\vartheta) = \sum_{i=1}^{p} \vartheta_i V_i$$

kde Y je n-rozmerný observačný vektor (jeho realizáciou vzniká súbor nameraných údajov), X je známa $n \times k$ matica plánu, β je neznámy k-rozmerný vektor parametrov siete (súradnice, výšky, gravitačné zrýchlenie), R^k je k-rozmerný euklidovský priestor (nepredpokladáme teda žiadne podmienky na parametre siete), ε je chybový vektor, $\Sigma(\vartheta)$ je jeho kovariančná matice a $\vartheta = (\vartheta_1,..,\vartheta_p)' \in \underline{\vartheta} \subset R^p$ je vektor charakteristík presnosti použitých prístrojov; podmnožina $\underline{\vartheta}$ p-rozmerného euklidovského priestoru je otvorená (v euklidovskej topológii) a charakterizuje tú množinu možných hodnôt charakteristík presnosti, ktoré v danej úlohe sa môžu vyskytnúť. V ďalšom predpokladáme $p \geq 2$.

Lema 1.1 Nech ϑ^* je skutočná hodnota vektora charakteristík presnosti ϑ . Ak ďalej hodnosť $r(Y)$ matice X je $k<n$ a matica $\Sigma(\vartheta^*)$ je pozitívne definitná, potom najlepší nevychýlený lineárny odhad parametra β je

$$\hat{\beta}(Y,\vartheta^*) = \left[X'\Sigma^{-1}(\vartheta^*)X\right]^{-1} X'\Sigma^{-1}(\vartheta^*)Y .$$

Lema 1.2 Za predpokladov lemy 1.1 pre každý vektor $\vartheta \neq \vartheta^*$ a pre každý vektor $h \in R^k$ platí

(a)

$$E\left(h'\hat{\beta}(Y,\vartheta) \mid \beta, \vartheta^* \right) = h'\beta , \quad \beta \in R^k$$

Tu symbol E označuje strednú hodnotu (matematickú nádej) a

$$E\left(h'\hat{\beta}(Y,\vartheta) \mid \beta, \vartheta^* \right)$$

znamená, že ju určujeme v bode β, ϑ^*.

(b)

$$Var\left(h'\hat{\beta}(Y,\vartheta) \mid \vartheta^* \right) \geq Var\left(h'\hat{\beta}(Y,\vartheta^*) \mid \vartheta^* \right)$$

Tu označenie $Var\left(h'\hat{\beta}(Y,\vartheta) \mid \vartheta^* \right)$ znamená, že varianciu odhadu $h\hat{\beta}(Y,\vartheta)$ funkcie $h(\beta) = h'\beta(Y,\vartheta), \beta \in R^k$ určujeme v bode ϑ^*.

Z poslednej lemy je zrejmé, že použitie nesprávnej hodnoty vektora ϑ nespôsobí vychýlenosť odhadu, avšak zväčší jeho disperziu.

Definícia 1.3 Náhodnú premennú

$$\partial\left(h'\hat{\beta}(Y,\vartheta) \right) / \partial\vartheta_i \,|_{\vartheta=\vartheta^*}$$

nazývame senzitivitou odhadu (estimátora) funkcie $h(\beta) = h'\beta(Y,\vartheta), \beta \in R^k$, na parameter ϑ_i. Ak observačný vektor Y realizujeme vektorom y, potom číslo

$$\partial\left(h'\hat{\beta}(y,\vartheta) \right) / \partial\vartheta_i \,|_{\vartheta=\vartheta^*}$$

nazveme aposteriórnou senzitivitou odhadu alebo senzitivitou estimátu funkcie $h(\beta) = h'\beta(Y,\vartheta), \beta \in R$, na parameter ϑ_i.

V ďalšom budeme predpokladať platnosť vzťahu

$$Var\left(h'\hat{\beta}(Y, \vartheta + \delta\vartheta) \mid \vartheta^* \right) = Var\left(h'\hat{\beta}(Y, \vartheta^*) + \left[\partial\left(h'\hat{\beta}(Y, \vartheta) \right) / \partial\vartheta' \mid_{\vartheta = \vartheta^*} \right] \delta\vartheta \mid \vartheta^* \right)$$

teda v Taylorovom rozvoji zanedbávame členy druhého a vyšších rádov. Tu

$$\left[\partial\left(h'\hat{\beta}(Y, \vartheta) \right) / \partial\vartheta' \mid_{\vartheta = \vartheta^*} \right] \delta\vartheta = \sum_{i=1}^{p} \left[\partial\left(h'\hat{\beta}(Y, \vartheta) \right) / \partial\vartheta'_i \mid_{\vartheta = \vartheta^*} \right] \delta\vartheta_i$$

Definícia 1.4 Označme

$$\delta_h = \sqrt{Var\left(h'\hat{\beta}(Y, \vartheta) \mid \vartheta^* \right)}.$$

Oblasť nesenzitivity pre odhad funkcieh $h(\beta) = h'\beta(Y, \vartheta), \beta \in R^k$ je

$$\left\{ \delta\vartheta : Var\left(h'\hat{\beta}(Y, \vartheta^* + \delta\vartheta) \mid \vartheta^* \right) \le \sigma_h^2 \left(1 + \varepsilon_h^2 \right) \right\}$$

Tu ε_h je číslo zvolené observátorom, ktorý pripúšťa zväčšenie smerodajnej odchýlky σ_h maximálne na hodnotu $\sigma_h \sqrt{1 + \varepsilon^2}$.

Definícia 1.5 Aposteriórna oblasť nesenzitivity pre odhad funkcie

$$h(\beta) = h'\beta(Y, \vartheta), \beta \in R,$$

je

$$\left\{ \delta\vartheta : \mid h'\hat{\beta}(y, \vartheta^* + \delta\vartheta) - h'\hat{\beta}(y, \vartheta^*) \le \sigma_h \varepsilon_h \right\}.$$

2. Určenie oblasti nesenzitivity pre funkciu parametra β

V tejto sekcii sa budeme zaoberať jedinou funkciou parametra β ; $h(\beta) = h'\beta, \beta \in R^k$. V ďalšom použijeme označenia

Y ~ (a, W), ktoré znamená, že náhodný vektor Y má strednú hodnotu a a kovariančnú maticu W,

A^+ znamená Mooreovu-Penroseovu zovšeobecnenú inverziu matice A (tzn. platí $AA^+A = A$, $A^+AA^+ = A^+$, $AA^+ = \left(AA^+\right)'$ a $A^+A = \left(A^+A\right)'$),

symbol Σ^* označuje $\Sigma\left(\vartheta^*\right)$,

$M_X = I - P_X \; P_X = XX^+$.

Tvrdenie 2.1 Pre náhodný vektor $\partial h'\hat{\beta}(Y,\vartheta)/\partial\vartheta'|_{\vartheta=\vartheta^*}$ platí:

(a)

$$\partial h'\hat{\beta}(Y,\vartheta)/\partial\vartheta'|_{\vartheta=\vartheta^*} = \begin{pmatrix} L_h V_1 \\ \vdots \\ L_h V_p \end{pmatrix} \Sigma^{*-1}\left(Y - X\hat{\beta}(Y,\vartheta^*)\right),$$

kde $L_h' = h'\left[X\Sigma^{*-1}X\right]^{-1} X\Sigma^{*-1}$.

(b)

$$\partial h'\hat{\beta}(Y,\vartheta)/\partial\vartheta'|_{\vartheta=\vartheta^*} \sim (0, W_h),$$

kde

$$\{W_h\}_{i,j} = \begin{pmatrix} L_h V_1 \\ \vdots \\ L_h V_p \end{pmatrix} \left(M_X \Sigma^* M_X\right)^+ \left(V_1 L_h \quad \cdots \quad V_p L_h\right), \qquad i,j = 1,..,p.$$

(c) Vektory

$$\partial h'\hat{\beta}(Y,\vartheta)/\partial\vartheta'|_{\vartheta=\vartheta^*} \text{ a } \hat{\beta}(Y,\vartheta^*)$$

sú neskorelované.

Dôsledok 2.2 Ak $\vartheta = \vartheta^* + \delta\vartheta$, potom

$$Var\left(h'\hat{\beta}(Y,\vartheta^* + \delta\vartheta)|\,\vartheta^*\right) = Var\left(h'\hat{\beta}(Y,\vartheta^*)|\,\vartheta^*\right) + \delta\vartheta' W_h \delta\vartheta'$$

Tvrdenie 2.3 Z Dôsledku 2.2 ľahko odvodíme, že oblasť nesenzitivity je

$$\left\{\delta\vartheta : \delta\vartheta' W_h \delta\vartheta \le \sigma_h^2 \varepsilon_h^2\right\}.$$

Oblasť nesenzitivity z tvrdenia 2.3 je cylinder s osou, ktorá prechádza začiatkom priestoru R^p a ktorej smer je daný vektorom ϑ^*. Plynie to z nasledujúceho tvrdenia.

Tvrdenie 2.4 Stĺpcový priestor $M(W_h) = \{W_h u : u \in R\}$ matice W_h je kolmý na vektor ϑ^*, tzn. $(\vartheta^*)' W_h = 0$.

Ak $\delta\vartheta = t\vartheta^*$, tzn. posun parametra ϑ nastal v smere skutočného vektora ϑ^*, potom

$$Var\left(h'\hat{\beta}(Y,\vartheta^* + \delta\vartheta)|\,\vartheta^*\right) = Var\left(h'\hat{\beta}(Y,\vartheta^*)|\,\vartheta^*\right).$$

Poznámka 2.5 Rozmery základne uvedeného cylindra sa menia, ak sa mení veľkosť vektora ϑ^* pri zachovaní jeho smeru. So zväčšovaním normy vektora ϑ^* (pri zachovaní smeru) sa základňa cylindra zväčšuje. Tieto pravidlá platia, pokiaľ používame definíciu 1.4 (tu ide o povolené relatívne (vzhľadom k σ) zväčšenie smerodajnej odchýlky.

Oblasť nesenzitivity sa môže definovať samozrejme aj tak, že za kritérium zvolíme absolútne zväčšenie smerodajnej odchýlky σ_h. Potom oblasť nesenzitivity bude

$$\{\delta\beta : \delta\beta' W_h \delta\beta \leq \varepsilon_h^2\},$$

kde ε_h je povolené zväčšenie hodnoty σ_h.

V prípade, že vyšetrenie oblasti nesenzitivity z nejakých dôvodov nemôžeme vykonať pred meraním, môžeme takéto vyšetrenie vykonať aj po meraní. Tu je situácia však kvalitatívne iná, pretože okrem dodatočného výpočtu apriórnej oblasti nesenzitivity môžme, a to na základe nameraných údajov, určiť aj aposteriórnu oblasť. Môže nastať situácia, že aposteriórna oblasť pokrýva apriórnu. Potom samozrejme do úvahy vezmeme aposteriórnu.

Tu platí následovné tvrdenie.

Tvrdenie 2.6 Ak

$$\left|\delta\vartheta'\left(L_h' V_1 \Sigma^{*-1} v \quad ,\cdots, \quad L_h' \Sigma^{*-1} V_p v\right)'\right| \leq \varepsilon_h \sigma_h,$$

potom

$$\left|h'\hat{\beta}\left(Y, \vartheta^* + \delta\vartheta\right) - h'\hat{\beta}\left(Y, \vartheta^*\right)\right| \leq \varepsilon_h \sigma_h$$

Tu $v = Y - X\hat{\beta}\left(Y, \vartheta^*\right)$.

Poznámka 2.7 Za funkcie h (.) obvykle volíme $h_i(\beta) = h_i'\beta, \beta \in R^k$, $i = 1,\ldots,k$; zrejme $h_i = \left(0_1,\ldots,0_{i-1},1_i,0_{i+1},\ldots,0_k\right)'$.

3. Určenie oblasti nesenzitivity pre konfidenčný elipsoid

Ak v našom matematickom modeli geodetickej siete má observačný vektor Y normálne (Gaussovo) rozdelenie pravdepodobnosti, potom možno určiť oblasť, v ktorej sa hodnota nejakej vektorovej funkcie $g(\beta) = G\beta, \beta \in R^k$, nachádza s pravdepodobnosťou 1-α (kde α je dostatočne malé číslo, ktoré obvykle volíme rovné 0.05). Platí tu nasledujúce tvrdenie.

Lema 3.1 Ak Y má normálne rozdelenie pravdepodobnosti a s× k matica G má hodnosť r(G) rovnú s<k, potom elispoid

$$E_g = \left\{ G\beta : \left[G\left(\beta - \hat{\beta}\right)\right]' \left\{G\left[X\Sigma^{-1}(\vartheta)X\right]^{-1} G'\right\}^{-1} G\left(\beta - \hat{\beta}\right) \leq x_s^2(0{,}1-\alpha) \right\}$$

pokrýva hodnotu (vektorovú) funkcie $g(.)$ s pravdepodobnosťou $1-\alpha$. Tu $x_s^2(0{,}1-\alpha)$ je $(1-\alpha)$-kvantil centrálneho chi-kvadrát rozdelenia pravdepodobnosti s s stupňami volnosti.

Z lemy 3.1 je zrejmé, že tvar aj rozmery konfidenčného elipsoida závisia od vektora ϑ. Za oblasť nesenzitivity zvolíme takú množinu vektorov $\delta\vartheta$, ktorá bude splňovať nasledujúcu podmienku. Použitie $\vartheta^* + \delta\vartheta$ namiesto ϑ^* spôsobí takú zmenu tvaru a rozmerov konfidenčného elipsoidu, že pravdepodobnosť pokrytia hodnoty funkcie $g(.)$ novým elipsoidom nebude menšia než $1-\alpha-\varepsilon_k$, kde ε_k je dostatočne malé číslo, ktoré zvolí observátor.

Tvrdenie 3.2 Nech

$$K = \left\{ \delta\vartheta : (\delta\vartheta - u_0)' \left(t^2 A - aa'\right)(\delta\vartheta - u_0) \leq \delta_{\varepsilon_k}^2 \frac{t^2}{t^2 - a'A^- a} \right\}.$$

Ak $\delta\vartheta \in K$, potom

$$P\left\{ G\beta^* \in \left\{ u : \left[u - G\hat{\beta}(Y, \vartheta^* + \delta\vartheta)\right]' \left\{G\left[X\Sigma^{-1}(\vartheta)X\right]^{-1} G'\right\}^{-1} \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \left[u - G\hat{\beta}(Y, \vartheta^* + \delta\vartheta)\right] \leq x_s^2(0{,}1-\alpha) \right\} \right\} \geq 1 - \alpha - \varepsilon_k$$

Tu

$u_0 = \left[\delta_{\varepsilon_k} / \left(t^2 - a'A^- a\right)\right] A^- a$,

δ_{ε_k} je riešením rovnice

$$P\left\{\chi_s^2\left(\delta_{\varepsilon_k}\right) \geq \chi^2(0{,}1-\alpha)\right\} = \alpha + \varepsilon_k,$$

$$A = 2S_{U_G} + 4C_{U_G, [M_X \Sigma(\vartheta^*) M_X]^+}$$

$$\left\{S_{U_G}\right\}_{i,j} = Tr\left(U_G V_i U_G V_j\right), \qquad i, j = 1, \ldots, p,$$

$$U_G = \Sigma^{-1}(\vartheta^*) X C^{-1} G' \left(G C^{-1} G'\right)^{-1} G C^{-1} X \Sigma^{-1}(\vartheta^*),$$

$$C = \Sigma^{-1}(\vartheta^*) X' \Sigma^{-1}(\vartheta^*) X ,$$

$$\{C_{U_G, [M_X \Sigma(\vartheta^*) M_X]^+}\}_{i,j} = Tr\{U_G V_i [M_X \Sigma(\vartheta^*) M_X]^+ V_j\}, \quad i, j = 1,..., p,$$

$$a = [Tr(U_G V_1),..., Tr(U_G V_p)]' ,$$

t je číslo z intervalu [3,5] a je zvolené podľa teórie uvedenej v [3]; v praxi vystačíme s číslom 4 a pri väčšej opatrnosti s číslom 5.

Literatúra

[1] Kubáček, L. and Kubáčková, L.: *The effect of stochastic relations on the statistical properties of an estimator.* Contr. Geoph. Inst. Slov. Acad. Sci. 17 (1987) 31--42

[2] Kubáček, L. and Kubáčková, L.: *Sensitiveness and non-sensitiveness in mixed linear models.* Manuscripta geodaetica 16 (1991) 63--71

[3] Kubáček, L.: *Criterion for an approximation of variance components in regression models.* Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Mathematica 34 (1995) 91--108

[4] Kubáček, L.: *Linear model with inaccurate variance components.* Applications of Mathematics 41 (1996) 433--445

[5] Kubáček, L., Kubáčková, L., Tesaříková, E., Marek, J.:*How the design of an experiment influences the nonsensitiveness regions in models with variance components*(zaslané do Applications of Mathematics)

[6] Kubáček, L., Kubáčková, L.: *Unified approach to a determination of nonsensitiveness regions* (zaslané do zborníka konferencie Probastat'98, DVP SAV Smolenice, 8. - 13. február 1998)

[7] Kubáček, L., Kubáčková, L.: *Nonsensitiveness regions in universal models* (zaslané do Mathematica Slovaca)

[8] Kubáčková, L., Kubáček, L., Bognárová, M.:*Effect of changes of the covariance matrix parameters on the estimates of the first order parameters.* Contr. Geoph. Inst. Slov. Acad. Sci. 20 (1990) 7--19

[9] Rao, C. R.: Linear Statistical Inference and Its Applications. J. Wiley, New York 1965

[10] Rao, C. R. and Mitra, S. K.: Generalized Inverse of Matrices and Its Applications. J. Wiley, New York 1971